2.2. WŁASNOŚCI FUNKCJI

Przykład 2.2.1. Wyznacz dziedzinę podanej funkcji:

a) $y = 3 - x$

b) $y = \dfrac{x}{2+4x}$

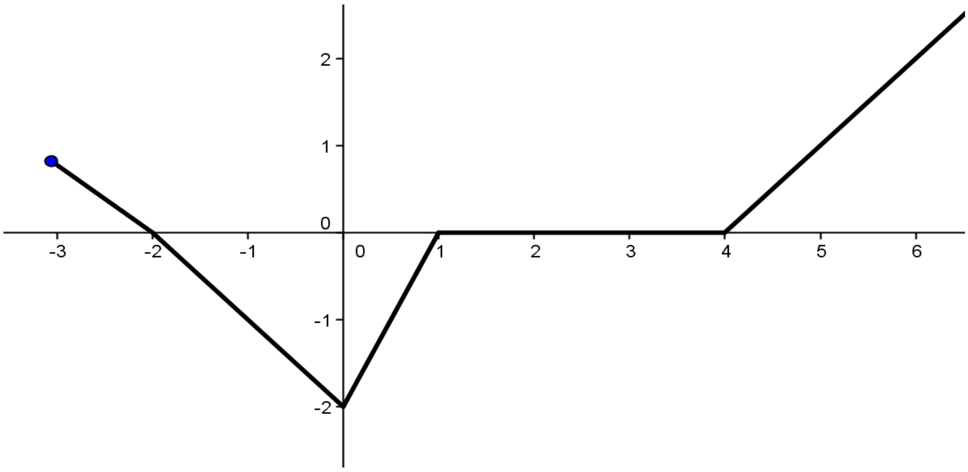
c) $y = \sqrt{3-x}$

d) $y = \dfrac{2}{\sqrt{2x}}$

Rozwiązanie	Komentarz
a) $y = 3 - x$ $D: x \in R$	Wyznaczając dziedzinę funkcji określonej wzorem, musimy podać zbiór wszystkich argumentów dla których wzór funkcji ma sens liczbowy. Do podanego wzoru za x możemy podstawić każdą liczbę rzeczywistą.
b) $y = \dfrac{x}{2+4x}$ założenie : $2 + 4x \neq 0$ $4x \neq -2 \,/ : 4$ $x \neq -\dfrac{2}{4}$ $x \neq -\dfrac{1}{2}$ $D: x \in R / \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$	Mianownik ułamka nie może być równy zero. Dziedziną funkcji są wszystkie liczby rzeczywiste za wyjątkiem liczb , które zerują mianownik.
c) $y = \sqrt{3-x}$ założenie : $3 - x \geq 0$ $-x \geq -3 \,/ : (-1)$ $x \leq 3$ $D: x \in (-\infty, 3\rangle$	Wyrażenie pod symbolem pierwiastka kwadratowego nie może być ujemne. Rozwiązane założenie przedstawiamy za pomocą przedziału.
d) $y = \dfrac{2}{\sqrt{2x}}$ założenie : $2x > 0 \,/ : 2$ $x > 0$ $D: x \in (0, +\infty)$	Wyrażenie podpierwiastkowe jest nieujemne i mianownik jest różny od zera, zatem wyrażenie 2x jest dodatnie. Rozwiązane założenie przedstawiamy za pomocą przedziału.

Miejscem zerowym funkcji f nazywamy argument x , dla którego wartość funkcji y jest równa zero. x_0 – miejsce zerowe funkcji f $\Rightarrow y = f(x_0) = 0$
Interpretacja geometryczna miejsca zerowego funkcji **Miejscem zerowym** funkcji f jest pierwsza współrzędna punktu przecięcia wykresu funkcji f z osią OX.

<u>Przykład 2.2.2.</u> Z wykresu funkcji odczytaj jej miejsca zerowe



Rozwiązanie	Komentarz
$x_0 \in \{-2\} \cup \langle 1,4 \rangle$	Odczytując miejsca zerowe funkcji z jej wykresu , korzystamy z definicji : Miejscem zerowym funkcji f jest pierwsza współrzędna punktu przecięcia wykresu funkcji f z osią OX. Dana funkcja ma nieskończenie wiele punktów wspólnych z osią OX.

Przykład 2.2.3. Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

a) $y = 5 + 2x$

Rozwiązanie	Komentarz
$D: x \in R$	Wyznaczając miejsca zerowe funkcji podanej wzorem , korzystamy z definicji : Miejscem zerowym_ funkcji f nazywamy argument x , dla którego wartość funkcji y jest równa zero. Określamy dziedzinę funkcji (zbiór argumentów).
$5 + 2x = 0$ $2x = -5 / : 2$ $x = -\frac{5}{2} \in D$ Odp. Funkcja ma jedno miejsce zerowe: $x_0 = -\frac{5}{2}$	Wyznaczamy argument x dla którego wartość funkcji y jest równa zero. Sprawdzamy czy otrzymany wynik należy do dziedziny funkcji.

b) $y = (2x+4)(3x-5)$

Rozwiązanie	Komentarz
$D: x \in R$	Określamy dziedzinę funkcji (zbiór argumentów).
$(2x+4)(3x-5) = 0$ $2x + 4 = 0$ lub $3x - 5 = 0$ $2x = -4 / : 2$ $\quad 3x = 5 / : 3$ $x = -2 \in D$ $\quad x = \frac{5}{3} \in D$ Odp. Funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_0 \in \left\{-2, \frac{5}{3}\right\}$	Wyznaczamy argumenty x dla którego wartość funkcji y jest równa zero. Sprawdzamy czy otrzymane wyniki należą do dziedziny funkcji.

c) $y = \frac{x^2 - 16}{2x + 8}$

Rozwiązanie	Komentarz
Założenie: $2x + 8 \neq 0$ $2x \neq -8 / : 2$ $x \neq -4$ $D: x \in R / \{-4\}$	Określamy dziedzinę funkcji (zbiór argumentów).
$\frac{x^2 - 16}{2x + 8} = 0 / \cdot (2x+8)$ $x^2 - 16 = 0$ $x^2 = 16$ $x = 4 \in D$ lub $x = -4 \notin D$ Odp. Funkcja ma jedno miejsce zerowe: $x_0 = 4$	Wyznaczamy argumenty x dla którego wartość funkcji y jest równa zero. Sprawdzamy czy otrzymany wyniki należą do dziedziny funkcji.

Każda z funkcji rosnąca, malejąca, stała, nierosnąca lub niemalejąca jest
funkcją monotoniczną.

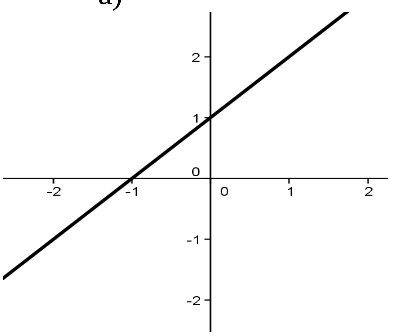
Dowodzenie monotoniczności funkcji

Jeśli przy założeniu $x_1 - x_2 < 0$ zachodzi:

a) $f(x_1) - f(x_2) < 0$, to funkcja jest rosnąca
b) $f(x_1) - f(x_2) > 0$, to funkcja jest malejąca
c) $f(x_1) - f(x_2) = 0$, to funkcja jest stała
d) $f(x_1) - f(x_2) \geq 0$, to funkcja jest nierosnąca
e) $f(x_1) - f(x_2) \leq 0$, to funkcja jest niemalejąca

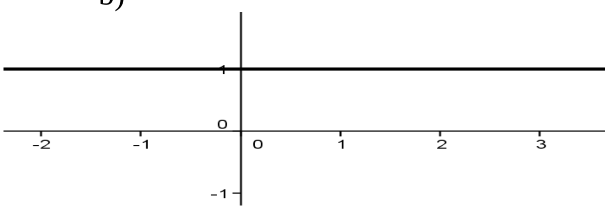
<u>Przykład 2.2.4.</u> Korzystając z wykresu określ monotoniczność funkcji:

a)



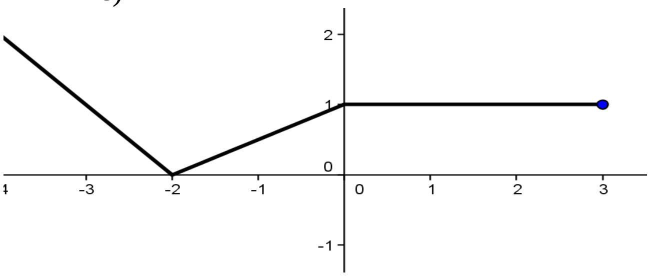
Rozwiązanie	Komentarz
Odp. Funkcja jest rosnąca.	Wykres funkcji „idzie” do góry.

b)



Rozwiązanie	Komentarz
Odp. Funkcja jest stała.	Dla wszystkich argumentów wartość funkcji jest taka sama.

c)



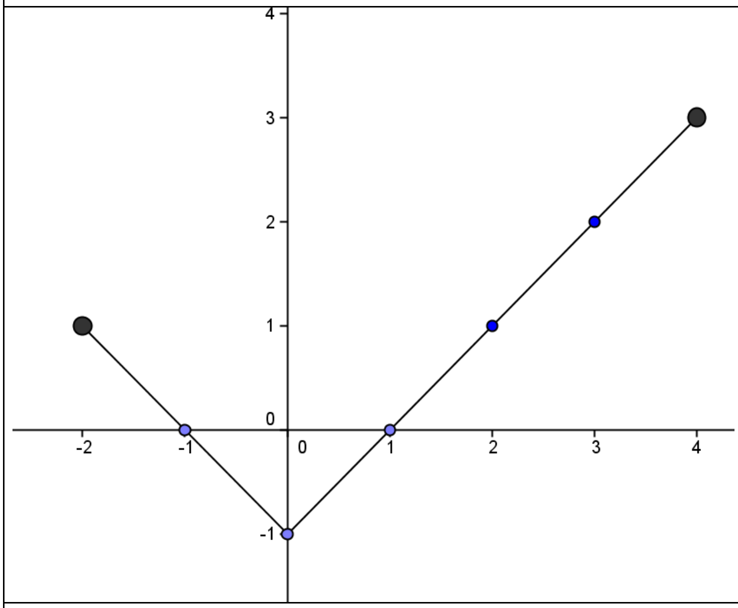
Rozwiązanie	Komentarz
Odp. Funkcja nie jest monotoniczna. Funkcja malejąca dla $x \in (-\infty, -2\rangle$ Funkcja rosnąca dla $x \in \langle -2, 0\rangle$ Funkcja stała dla $x \in \langle 0, 3\rangle$	Funkcja nie jest monotoniczna w dziedzinie. Można określić przedziały monotoniczności, czyli przedziały , w którym funkcja rośnie, maleje oraz jest stała.

Przykład 2.2.5. Na podstawie definicji wykaż , że funkcja $f(x) = 2x - 3$ jest rosnąca w zbiorze R.

Rozwiązanie	Komentarz
Założenie: $x_1 - x_2 < 0$ $f(x_1) = 2x_1 - 3$ $f(x_2) = 2x_2 - 3$ $f(x_1) - f(x_2) = (2x_1 - 3) - (2x_2 - 3) =$ $= 2x_1 - 3 - 2x_2 + 3 = 2x_1 - 2x_2 = 2(x_1 - x_2) < 0$ Odp. Funkcja $f(x) = 2x - 3$ jest rosnąca w zbiorze R.	Aby wykazać, że dana funkcja jest rosnąca musimy udowodnić , że przy założeniu $x_1 - x_2 < 0$ zachodzi: $f(x_1) - f(x_2) < 0$

Wartość największą funkcji oznaczmy M Wartość najmniejszą funkcji oznaczamy m
Wartość największą funkcji w przedziale $\langle a, b\rangle$ oznaczmy $M_{\langle a,b\rangle}$ Wartość najmniejszą funkcji w przedziale $\langle a, b\rangle$ oznaczamy $m_{\langle a,b\rangle}$

<u>Przykład 2.2.6.</u> Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji $y=|x|-1$ w przedziale $\langle -2,4\rangle$

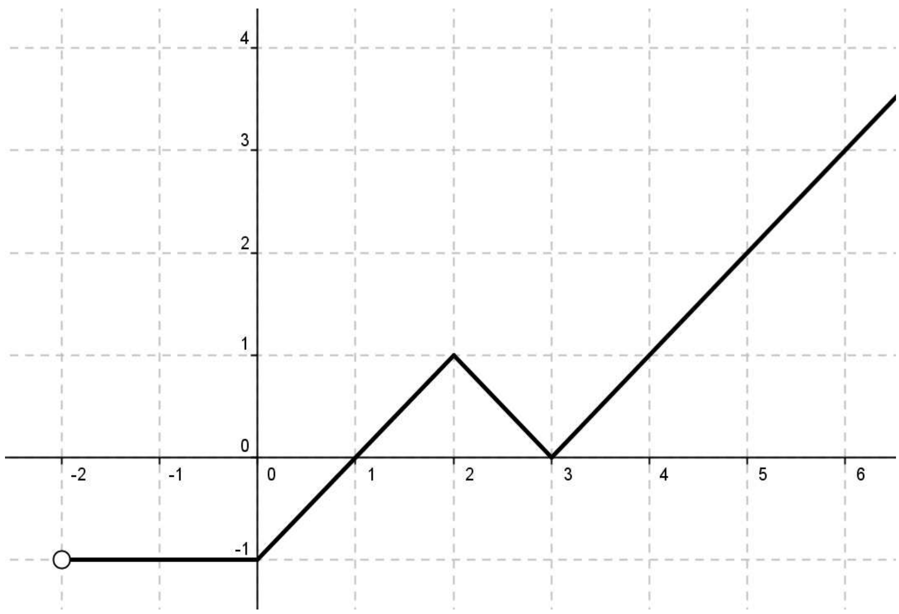
<table>
<tr><th>Rozwiązanie</th><th>Komentarz</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>$x\in\langle -2,4\rangle$</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$y=|x|-1$</td><td>1</td><td>0</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>
</td><td>Przy pomocy tabelki rysujemy wykres funkcji.
Za argumenty x obieramy dowolne liczby z podanego przedziału. Końce przedziału muszą znaleźć się w tabelce.
Wartości funkcji y obliczamy wstawiając kolejne argumenty x do wzoru funkcji.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Wyznaczone punkty z tabelek zaznaczamy w układzie współrzędnym.

Łącząc punkty otrzymujemy wykres funkcji.
Musimy pamiętać, aby odpowiednio zaznaczyć końce wykresu.</td></tr>
<tr><td>$m_{\langle -2,4\rangle}=-1$ - wartość najmniejsza funkcji
w przedziale $\langle -2,4\rangle$

$M_{\langle -2,4\rangle}=3$ - wartość największa funkcji
w przedziale $\langle -2,4\rangle$</td><td>Z wykresu funkcji odczytujemy wartość najmniejszą (najmniejszy y) i wartość największą (największy y) funkcji w przedziale $\langle -2,4\rangle$</td></tr>
</table>

<u>Przykład 2.2.7.</u> Na podstawie wykresu funkcji odczytaj własności:

a) dziedzina,
b) zbiór wartości,
c) miejsca zerowe,
d) przedziały monotoniczności,
e) znak funkcji (przedziały , w których funkcja przyjmuje wartości ujemne oraz przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.),
f) wartość najmniejszą i wartość największą funkcji,
g) wartość funkcji dla argumentu 6.



Rozwiązanie	Komentarz
a) dziedzina $D: x \in (-2, +\infty)$	Dziedzinę funkcji odczytujemy z osi OX.
b) zbiór wartości $y \in \langle -1, +\infty)$	Zbiór wartości funkcji odczytujemy z osi OY.
c) miejsca zerowe $x_0 \in \{1,3\}$	Miejsce zerowe funkcji jest to pierwsza współrzędna punktu przecięcia się wykresu funkcji z osią OX.
d) przedziały monotoniczności: funkcja stała dla $x \in (-2, 0\rangle$ funkcja rosnąca dla $x \in \langle 0,2 \rangle$ funkcja malejąca dla $x \in \langle 2,3 \rangle$ funkcja rosnąca dla $x \in \langle 3, +\infty)$	Przedziały monotoniczności odczytujemy na osi OX.
e) znak funkcji: $y > 0$ dla $x \in (1,3) \cup (3, +\infty)$ $y < 0$ dla $x \in (-2, 1)$	Wartościom dodatnim funkcji odpowiada ta część jej wykresu, która znajduje się nad osią OX. Wartościom ujemnym funkcji odpowiada ta część jej wykresu, która znajduje się pod osią OX.
f) wartość najmniejsza funkcji: $m = -1$ wartość największa funkcji : brak	Wartość najmniejszą funkcji jest druga współrzędna punktu (punktów) najniżej położonych na wykresie. Wartość największą funkcji jest druga współrzędna punktu (punktów) najwyżej położonych na wykresie.
g) $f(6) = 3$	Punkt (6,3) należy do wykresu funkcji. Zatem argumentowi 6 funkcja przyporządkowuje wartość 3.

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 2.2.1. Wyznacz dziedzinę podanej funkcji:

a) (1pkt.) $y = \frac{x+4}{2}$

b) (1pkt.) $y = \frac{2}{(2x-1)(3-x)}$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie dziedziny funkcji.	1

c) (2pkt.) $y = \frac{\sqrt{10-2x}}{\sqrt{x}}$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie założeń.	1
2	Podanie dziedziny funkcji.	1

Ćwiczenie 2.2.2. Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

a) (2pkt.) $y = x^2 + 1$

b) (2pkt.) $y = \frac{x^2-1}{\sqrt{4x+3}}$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie dziedziny funkcji.	1
2	Podanie miejsc zerowych funkcji.	1

Ćwiczenie 2.2.3. (1pkt.) Określ monotoniczność funkcji $y = 2 - x$ dla $x \in R$

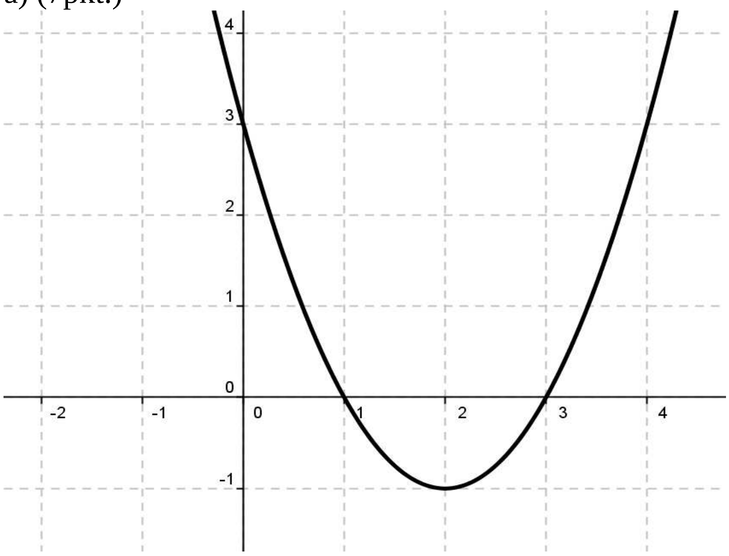
schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie monotoniczności funkcji	1

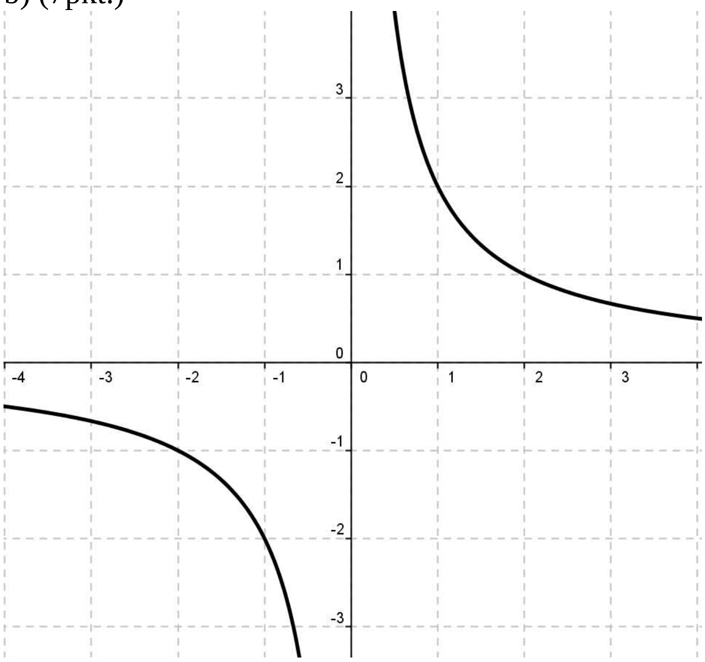
Ćwiczenie 2.2.4. Na podstawie wykresu funkcji odczytaj własności:

1) dziedzina,
2) zbiór wartości,
3) miejsca zerowe,
4) przedziały monotoniczności,
5) znak funkcji (przedziały , w których funkcja przyjmuje wartości ujemne oraz przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.),
6) wartość najmniejszą i wartość największą funkcji,
7) wartość funkcji dla argumentu 2.

a) (7pkt.)



b) (7pkt.)



schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie dziedziny	1
2	Podanie zbioru wartości	1
3	Podanie miejsc zerowych	1
4	Podanie przedziałów w których funkcja rośnie, maleje lub jest stała.	1
5	Podanie przedziałów , w których funkcja przyjmuje wartości ujemne oraz przedziałów, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie	1
6	Podanie wartości najmniejszej i wartości największej funkcji.	1
7	Podanie wartości funkcji dla argumentu 2.	1